УДК: 621.391.1

Кулешова А. А.
магистрант,
Самарский Национальный Исследовательский Университет
имени Академика С.П. Королева» (Самарский университет)

ПОИСК АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА БЕЗ ФАЗЫ

Поиск алгоритмов для восстановления сигнала без фазы актуален в настоящее время. Алгоритмы восстановления важны в обработке разнообразных сигналов, в особенности в технологии распознавания речи, в томографии. Главное свойство фреймов, которое делает их настолько полезными в прикладных задачах – их избыточность. Хорошо выбранный фрейм может обеспечить численную устойчивость для восстановления сигнала и получение важных характеристик сигнала.

***Ключевые слова**: фрейм, восстановление сигнала без фаз, равномерные фреймы.*

Дискретизация и квантование аналогового сигнала приводят к рассмотрению сигнала как элемента некоторого конечномерного пространства V. В таком пространстве, вообще говоря, комплексном, вводится комплексное скалярное произведение и соответствующая эрмитова норма. По ортонормированному базису (ОНБ) $\{u_i\}_{i=1}^{N}$ «сигнал» $x \in \mathrm{V}$ единственным образом представляется суммой:

$$x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, u_i \rangle \; u_i .$$

Комплексные коэффициенты описываемого представления $\langle x, u_i \rangle$ дают возможность полного восстановления сигнала и часто понимаются как «измерения» сигнала. Реальные измерения получаются вещественными, и зазор между $\langle x, u_i \rangle$ и амплитудами измерений $|\langle x, u_i \rangle|$ оказывается непреодолимым при восстановлении сигнала.

Представляя сигнал в различных базисах, можно получить о нем разностороннюю информацию. Так, переход от представления по ортам к представлению в базисе Фурье, позволяет получить частотные характеристики сигнала, дающие широкие возможности для его цифровой обработки.

Последние годы значительное количество работ посвящено решению следующей задаче: построить такие системы «измерительных» векторов $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$, которые позволяют восстановить произвольный сигнал $x \in \mathrm{V}$ по набору вещественных чисел $|\langle x, f_i \rangle|$.

В классе ОНБ такая задача не имеет решения.

Основная проблема, поставленная в [13], до сих пор далека от окончательного решения:

Найти необходимые и достаточные условия на систему векторов представления $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ (т.н. «измерительных векторов»), которые обеспечивают инъективность и устойчивость отображения «измерения амплитуды» сигнала *x*:

$$(A(x))(i) := |\langle x, f_i \rangle|^2 .$$

Семейство векторов $\{f_i\}_{i=1}^{M}$ называется фреймом гильбертового пространства H^N, если существуют такие константы $0 < A \le B < \infty$, такие, что для всех $x \in H$ выполняются следующие неравенства:

$$A\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{M} \left|\langle x, f_i \rangle\right|^2 \le B\|x\|^2 .$$

A и B называются границами фрейма. Наибольшая из нижних границ называется оптимальной нижней границей, а наименьшая из верхних границ - оптимальной верхней границей. Если A = B, то фрейм называется A-жестким, а если A = B = 1, то фреймом Парсеваля-Стеклова.

Числа $\left\{\langle x, f_i \rangle\right\}_{i=1}^{M}$ называются фреймовыми коэффициентами.

Пусть $\left\{ f_i \right\}_{i=1}^{M}$ – фрейм, линейное отображение:

$$T : H^N \to H^M = l^2(I),\;\; T(x) = \left\{\langle x, f_i \rangle\right\}_{i=1}^{M}$$

называется оператором анализа.

Линейное отображение:

$$T^* : H^M = l^2(I) \to H^N , T^*(c) = \sum_{i=1}^{M} c_i f_i$$

называется оператором синтеза.

Композиция T и T^* определяет фреймовый оператор – положительный, самосопряженный обратимый оператор:

$$S = T^*T : H^N \to H^N : Sx = T^*Tx = \sum_{i=1}^{M} \langle x, f_i \rangle f_i .$$

Он обеспечивает точную формулу для восстановления:

$$x = \sum_{i=1}^{M} \langle x, f_i \rangle S^{-1} f_i .$$

Семейство векторов $F = \left\{ f_i \right\}_{i=1}^{M}$ является равномерным равноугольным жёстким фреймом, если

1) $\exists \beta > 0 : \; \| f_i \| = \beta \quad \forall i = \overline{1, M}$;

2) $\exists c > 0 :$ для любой пары векторов фрейма f_j и f_k , j≠k, фрейма мы имеем:

$$\left\langle \left| f_j , f_k \right| \right\rangle = c.$$

Известно, что есть верхняя граница для числа векторов в равномерном равноугольном жёстком фрейме $F = \left\{ f_i \right\}_{i=1}^{M}$ на N-мерном Гильбертовом пространстве H. В вещественном случае это $M \le \dfrac{N(N+1)}{2}$, в комплексном случае – $M \le N^2$([10], [3]). Построение максимального числа векторов для равномерного равноугольного жесткого фрейма очень сложная и нерешенная задача в теории фреймов.

Рассмотрим P - нелинейное отображение, переводящее вектор в набор модулей фреймовых коэффициентов:

$$P : H \to l^2(I), P(x) = \left\{ \left| \langle x, f_i \rangle \right| \right\}_{i=1}^{M} .$$

Множество $Gr(N, M; R)$ – это множество N-мерных линейных подпространств в R^M , которое имеет структуру $N(M - N)$ – мерного множества.

Множество $Gr(N,M;R)$ называется многообразием Грассмана.

Фрейм $\{f_i\}_{i=1}^M$ называется фреймом общего положения, если $\{f_i\}_{i=1}^M \subset L \in U$, где U – открытое по Зарисскому множество и $U \subset Gr(N,M)$.

Теорема 1: (Вещественный случай) [13] Если $M \geq 2N-1$, то для фрейма общего положения $F=\{f_i\}_{i=1}^M$, нелинейное отображение P инъективно.

Множество $\{f_i\}_{i=1}^M \subseteq R^N$ называется набором с полным спарком, если каждое его подмножество из N векторов полно в R^N.

Для анализа инъективности важным является свойство альтернативной полноты.

Набор векторов $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ в R^N (C^N) назовем альтернативно полным, если для любого $\varphi \subseteq \{1,\dots,\mathrm{M}\}$, либо $\{f_i\}_{i\in\varphi}$, либо $\{f_i\}_{i\in\varphi^C}$ полно в R^N (C^N).

Пусть $H/\sim$ – фактор-пространство, полученное отождествлением двух векторов, если они отличаются постоянным фазовым коэффициентом. Таким образом, x~y означает, что существует константа c:|c|=1, такая что y = cx.

Для вещественных Гильбертовых пространств $c=\pm 1$, тогда $H_r = H/\{\pm 1\}$.

Для комплексных гильбертовых пространств $c=e^{i\theta}$, тогда $H_r = H/\{T^1\}$, где T^1- окружность единичного радиуса на комплексной плоскости.

В квантовой механике эти проективные лучи определяют квантовые состояния [12].

Теорема 2: Пусть $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ – набор векторов в R^N. Отображение $A: R^N/\{\pm 1\} \to R^M$ определено равенствами: $(A(x))(i) := \left|\langle x, f_i \rangle\right|^2, \quad i=1,..,M$. Тогда отображение A инъективно тогда и только тогда, когда F - альтернативно полно.

Теорема 3: Всякий набор с полным спарком $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ в R^N с $M \geq 2N-1$ удовлетворяет свойству альтернативной полноты.

Теорема 4: В вещественном случае, если $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ в R^N и $M \leq 2N-2$, то отображение $A: R^N/\{\pm 1\} \to R^M$ не является инъективным. Если $M=2N-1$, то отображение A инъективно тогда и только тогда, когда $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ – полный спарк.

Доказательство: Если $M \leq 2N-2$, то множество $\{1,..,M\}$ можно разбить на множества φ и φ^C так, чтобы мощность каждого не превосходила $N-1$. Ни одно из множеств $\{f_i\}_{i\in\varphi}$, $\{f_i\}_{i\in\varphi^C}$ не может быть полным.

Если $M=2N-1$ и $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ - полный спарк, то инъективность A следует из леммы 2 и теоремы 3.

Обратно, если A – инъективно, то $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ является альтернативно полным семейством. Возьмем произвольное подмножество $\varphi \subseteq \{1,..,M\}$ с $|\varphi| = N$. Тогда $\left|\varphi^C\right| = N-1$ и $\{f_i\}_{i\in\varphi^C}$ не может быть полным. Следовательно, $\{f_i\}_{i\in\varphi}$ полно, и $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ – полный спарк.

Неизвестна точная минимальная граница для комплексного случая. Также, в вещественном случае существует простой прямой метод для проверки инъективности отображения A для соответствующего фрейма [4].

Следствие 1: Если F это M–элементный фрейм в R^N с $M \geq 2N-1$ и у $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ каждые N-элементов фрейма линейно независимы, то оператор $A: H^N{}_r \to H^M = l^2(I)$ – инъективен.

Теорема 5: (Комплексный случай) Если M ≥ 4N-2, то для фрейма общего положения F, отображение A инъективно.

(4M − 4)-гипотеза: (Комплексный случай) Если M ≥ 4N-2, то для фрейма общего положения F, отображение A инъективно.

Пусть $F=\{f_i\}_{i=1}^M \subseteq C^N$ и отображение $A: C^N/\{T^1\} \to R^M$ определено соотношениями $(A(x))(i) := \left|\langle x, f_i \rangle\right|^2,\ i=1,..,M$. Если $M \geq 2$, то:

(а) Если $M < 4N-4$, то отображение A не является инъективным (опровергнуто для N=4)

(б) Если $M \geq 4N-4$, то отображение A может быть инъективным для некоторых фреймов.

В [1] показывается, что фрейм общего положения будет восстанавливать сигнал без фазы за полиномиальное число шагов.

Пусть H – фиксированное N-мерное векторное пространство (вещественное или комплексное), пусть $\{e_1,..,e_N\}$ – ортонормированный базис для H.

Теорема 6:

(а) Если $H \in R^N$, $M \geq \dfrac{N(N+1)}{2}$ и $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ – фрейм общего положения, нелинейное отображение P – инъективно. Тогда вектор $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$ может быть восстановлен (с точностью до знака) из множества $\{|\langle x, f_i \rangle|\}_{i=1}^M$ модулей фреймовых коэффициентов за полиномиальное число шагов $(\mathrm{O}(\mathrm{N}^6))$.

(б) Если $H \in C^N$, $M \geq N^2$ и $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ – фрейм общего положения, нелинейное отображение P – инъективно. Тогда вектор $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$ может быть восстановлен (с точностью умножения на корень из единицы) из множества $\{|\langle x, f_i \rangle|\}_{i=1}^M$ модулей фреймовых коэффициентов за полиномиальное число шагов $(\mathrm{O}(\mathrm{N}^6))$.

Литература

1. R. Balan, B. G. Bodmann, P. G. Casazza, D. Edidin, Fast algorithems for signal reconstruction without phase, Proceedings of SPIE-Wavelets XII, San Diego 6701 (2007) 670111920-670111932.

2. R. Balan. Equivalence relations and distances between Hilbert frames. Proc. Amer. Math. Soc., 127(8) : 2353–2366, 1999.

3. R. Balan, B. G. Bodman, P. G. Casazza and D. Edidin, Painless reconstruction from magnitudes of frame coefficients, preprint.

4. R. Balan, P. Casazza, D. Edidin, On signal reconstruction without phase, Appl.Comput.Harmon.Anal. 20 (2006), 345–356.

5. A. R. Calderbank, P. J. Cameron, W. M. Kantor, and J. J. Seidel, Z4-Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal Euclidean line-sets, Proc. London Math. Soc. (3) 75 (1997), no. 2, 436–480.

6. P. J. Cameron and J. J. Seidel, Quadratic forms over GF (2), Indag. Math. 35 (1973), 1–8.

7. P. G. Casazza and M. Fickus, Fourier transforms of finite chirps, EURASIP J. Appl. Signal Process. (2006), Frames and overcomplete representations in signal processing, communications, and information theory, Art. ID 70204, 1-7.

8. P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geometriae Dedicata 6 (1977), no. 3, 363–388.

9. D. Han and D. Larson. Frames, bases and group representations, Memoirs American Math. Soc. 147 (2000), no. 697.

10. R. Holmes and V. I. Paulsen, Optimal frames for erasures, Lin. Alg. Appl. 377 (2004), 31–51.

11. S. D. Howard, A. R. Calderbank, and W. Moran, The finite Heisenberg-Weyl groups in radar and communications, EURASIP J. Appl. Signal Process. (2006), no. Frames and overcomplete representations in signal processing, communications, and information theory, Art. ID 85685, 1-12.

12. R. F. Streater and A. S. Wightman. PCT, Spin and Statistics and All That. Princeton University Press, Landmarks in Mathematics and Physics, 2000.

13. A. Bandeira, J. Cahill, D. Mixon, A. Nelson. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2014. V. 37. I. 1. PP. 106-125.