УДК 551.435.054(262.5)

Казак А.Н.
кандидат экономических наук, доцент
кафедры менеджмента и туристского бизнеса,
Гуманитарно-педагогическая академия
КФУ им. В.И. Вернадского (филиал в г. Ялта)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КЛИФ-ПЛЯЖ С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ ПЛЯЖЕОБРАЗУЮЩЕГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПОНЕНТЫ ВОЛНОВОЙ АКТИВНОСТИ

Статья является продолжением исследования проблемы динамики и устойчивости берегов. Актуальность темы обусловлена экономическим значением берегов и колоссальным увеличением антропогенной нагрузки на них. Представлена имитационная динамическая модель с учетом диффузии пляжеобразующего материала под действием стохастической компоненты волновой активности.

Ключевые слова: *математическая модель, динамическая система, клиф-пляж, море, размеры, наносы.*

Kazak A.N.
PhD, Associate Professor Department of Management and tourism Business,
Humanities and Education Academy CFI them. Vernadsky (branch in Yalta)

MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMIC CLIFF BEACH, WITH REGARD TO THE BEACH DIFFUSION MATERIAL BY WAY OF THE STOCHASTIC COMPONENT OF WAVE ACTIVITY

This article is a continuation of the study of the problem of the dynamics and stability of banks. Relevance of the topic due to the economic value of the banks and the enormous increase of anthropogenic load on them. Presented simulation dynamic model based on the diffusion of beach forming material by the stochastic component of wave activity.

Keywords: *mathematical model, dynamic system, cliff-beach, the sea, the size, sediment.*

В последние десятилетия начали преобладать инструментальные исследования пляжей с помощью численных методов, что позволило получить количественные характеристики морфологии и динамики. Пляжи представляют из себя значимый рекреационный ресурс, средство природной защиты коренных берегов от абразии, индикатор преобразования всей береговой зоны. Многолетние горизонтальные деформации береговой линии составляют ±47 м на аккумулятивных формах, а у подножья клифов до ±23 м в условиях береговой зоны Черного моря. На каждом участке берега с похожими физико-географическими условиями пляжи тяготеют к средним линейным и объемным размерам, несмотря на разбросы штормовых значений.

В работах [1-6] была предложена модель динамической системы клиф-пляж:

$$\frac{dW}{dt} = aVH - KW, \tag{1}$$

где $W > 0$ — объем обломочного материала на пляже на единицу его длины, $V = f(w)$ — скорость отступания берегового уступа (клифа) (зависящая от объема обломочного материала W), H = const — высота клифа, К — коэффициент истирания наносов, t — время, a — содержание обломочного материала в клифе.

Данная модель может быть обобщена и дополнена описанием диффузионного процесса пляжеобразующего материала, перпендикулярного береговой линии.

Для этого заменим уравнение (1) системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = aV(W)H - KW + D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \\ \frac{dx(t)}{dt} = V(W), \end{cases} \tag{2}$$

где D — коэффициент диффузии обломочного материала, x — координаты по оси, направленной перпендикулярно береговой линии, начало отсчета, которой совпадает с кромкой моря, W, V, H, a, K и t совпадает с обозначениями уравнения (1).

Стационарное решение первого из уравнений системы (1) удовлетворяет уравнению:

$$D\frac{d^2W(x)}{dx^2} = KW - aV(W)H = -\frac{d}{dW}\left\{\int_0^W dy(aV(y)H) - K\frac{W^2}{2}\right\} \tag{3}$$

Умножая левую и правую части уравнения (3) на $\frac{dW}{dx}$, получим:

$$D\frac{dW}{dx}\frac{d^2W(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{D}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = -\frac{d}{dx}\left\{\int_0^W dy(aV(y)H) - \frac{KW^2}{2}\right\},$$

или:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{D}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \int_0^W dy(aV(y)H) - \frac{KW^2}{2}\right\} = 0 \tag{4}$$

Мы получили аналог закона сохранения энергии. Обозначая эту «энергию» символом E, получим:

$$\frac{D}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = E - \int_0^W dy(aV(y)H) + \frac{KW^2}{2},$$

или:

$$\frac{dW}{dx} = \sqrt{\frac{2}{D}\left(E - aH\int_0^W dyV(y) + \frac{KW^2}{2}\right)},$$

что дает:

$$\int_0^W \frac{dZ}{\sqrt{\frac{2}{D}\left(E - aH\int_0^Z dyV(y) + \frac{KZ^2}{2}\right)}} = x \tag{5}$$

Обратив функцию x = x(W) (5), получим зависимость объема пляжеобразующего материала на единицу длины от расстояния от кромки моря: W = W(x), подставив которую в нижнее из уравнений системы (2), получим уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = V(W(x)), \tag{6}$$

интегрируя которое, получим зависимость t = t(x):

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{V(W(y))} = t. \tag{7}$$

Обратив равенство (7), получим зависимость величины отступания клифа от времени: x = x(t).

В качестве простого примера динамической системы клиф-пляж рассмотрим случай: $V(W) = V_0 = const.$

В этом случае система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = aV_0H - KW + D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \\ \frac{dx}{dt} = V_0. \end{cases} \quad (8)$$

Нижнее уравнение системы (8) легко решается:

$$x = x_0 + V_0 t. \quad (9)$$

Для решения верхнего уравнения системы (8), введем новую переменную $\widetilde{W}$:

$$\widetilde{W} = W - \frac{aV_0H}{K}, \quad (10)$$

тогда это уравнение примет вид:

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} = -K\widetilde{W} + D\frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Его решение будем искать в виде $\widetilde{W} = l^{-Kt}W_1.$ (12)

Подставив (12) в (11), получим:

$-Kl^{-Kt}W_1 + l^{-Kt}\frac{\partial W_1}{\partial t} = -Kl^{-Kt}W_1 + D\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}l^{-Kt}$,или:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = D\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Таким образом, W_1 является решением уравнения диффузии. Оно равно:

$$W_1(x,t) = l^{tD\frac{\partial^2}{\partial x^2}}W_1(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dy lxp\left\{-y^2 + 2y\sqrt{tD}\frac{\partial}{\partial x}\right\}W_1(x,0) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dy l^{-y^2}W_1(x + 2y\sqrt{tD}, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dZ}{2\sqrt{\pi tD}}l^{\frac{-(x-z)^2}{4tD}}W_1(Z,0)$$

,

где была использована замена переменных:

$$y = \frac{Z - x}{2\sqrt{tD}}.$$

Теперь, используя преобразование (10), окончательно получим:

$$W = \frac{aV_0H}{K} + \widetilde{W} = \frac{aV_0H}{K} + l^{-Kt}_{W_1} = \frac{aV_0H}{K} + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dZl^{-Kt}}{2\sqrt{\pi tD}}l^{-\frac{(x-z)^2}{4tD}}W_1(Z,0). \quad (14)$$

В результате постоянство скорости отступания клифа приводит (через время $\sim\frac{1}{K}$) к наличию на пляже постоянного количества пляжеобразующего материала $\frac{aV_0H}{K}$, то есть пляж (в рамках данной математической модели) при условии $V = V_0 = const$ будет существовать постоянно. Данные выводы практически подтверждаются опытом реализации эффективных проектов искусственных пляжей Краснодарского «Кубаньводпроекта», реализованных в минувшие десятилетия в Абхазии, Новороссийске, Геленджике, Сочи. На базе комплексного географического подхода было созданы наносоудерживающие сооружения из природного камня с одновременным полным демонтажем бун и волнорезов.

Литература:

1. Есин Н.В. О роли обломочного материала в абразионном процессе // Океанология. — 1980. — Т. 20, №1. — с. 111-115.

2. Есин Н.В., Московин В.М., Окунь А.В. Математическая модель абразионного процесса для условий прямолинейного берегового склона. // Водные ресурсы. — 1983. — №5. — с. 92-97.

3. Казак А.Н. Прогнозирование развития прибрежной зоны моря на основе анализа динамической системы клиф-пляж / А.Н.Казак // Таврический научный обозреватель. — 2015. — №4. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http:// http://tavr.science/stat/2015/12/Kazak.pdf

4. Казак А.Н., Бочкова Е.Б. Инновационный проект улучшения экологического состояния Крыма/ Е.Б.Бочкова, А.Н.Казак / Гуманитарные науки. — КГУ, Ялта 2012. — №.2(24) — С.75–78

5. Мендыгулов Ю.Д., Московин В.М. К вопросу построения стохастической теории процесса пляжеформирования // Океанология, 1993. — Т.33, — №3. — с.441-444.

6. Московин В.М., Мендыгулов Ю.Д. Анализ стохастической модели процесса пляжеформирования // Гидромеханика. — Киев: Наукова думка, 1993 вып. 66, с. 10-15.

7. Пешков В.М. Из опыта защиты Азово-Черноморских брегов России// Пути решения проблемы сохранения и восстановления пляжей Крымского полуострова: материалы научно-практической конференции — г.Севастополь, 16-18 сентября 2015 г. — г.Севастополь, 2015 — С.12-13

8. Трофимов А.М., Московин В.М. Модель динамической системы клиф-пляж и её приложение для целей прогнозирования развития берегов // Сп. Количественный анализ экзогенного рельефообразования. Из-во Казанского ун-та, 1998.